10. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 14.01.2011)

Aufgabe H19 *Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld* (5 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines geladenen, harmonisch gebundenen Teilchens der Ladung q und Masse m im homogenen elektrischen Feld $\mathcal{E}$ lautet

$$H \;=\; \tfrac{1}{2m}P^2 \;+\; \tfrac{m\omega^2}{2}X^2 \;-\; q\mathcal{E}X\;. \qquad (*)$$

(a) Drücken Sie H aus durch die dimensionslosen Größen

$$\widetilde{X} = \sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}\,X\;, \qquad \widetilde{P} = \tfrac{1}{\sqrt{\hbar m\omega}}\,P \qquad \text{und} \qquad \alpha = \tfrac{q\mathcal{E}}{\sqrt{2m\hbar\omega^3}}\;.$$

(b) Eliminieren Sie $\widetilde{X}$ und $\widetilde{P}$ zugunsten von $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widetilde{X} + \mathrm{i}\widetilde{P})$ und $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widetilde{X} - \mathrm{i}\widetilde{P})$.

(c) Welche unitäre Transformation U überführt

$a \;\mapsto\; \tilde{a} \;=\; U\,a\,U^\dagger \;=\; a{+}\beta \qquad \text{und} \qquad a^\dagger \;\mapsto\; \tilde{a}^\dagger \;=\; U\,a^\dagger U^\dagger \;=\; a{+}\beta \qquad \text{mit} \quad \beta\in\mathbb{R}\,?$

Hinweis: Falls $A^\dagger = -A$ und $U = \mathrm{e}^A$, dann gilt $U^\dagger U = \mathbb{1}$.
Welchen antihermiteschen Operator A kann man aus a und $a^\dagger$ bauen?

(d) Bei welchem Wert von β verliert $\widetilde{H} = UHU^\dagger$ die in a und $a^\dagger$ linearen Terme? Welches Energiespektrum $\{E_n\}$ hat demnach das Teilchen?

(e) Hätte man dies auch direkt erhalten können durch quadratische Ergänzung von $(*)$?

Aufgabe H20 *Eigenschaften des Wasserstoff-Atoms* (5 Punkte)

Ein Wasserstoff-Elektron befinde sich im normierten Grundzustand $|\psi\rangle$, der durch

$$\langle\vec{r}\,|\psi\rangle \;=\; (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}} \qquad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$$

und dem Bohrschen Radius $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0.529\cdot 10^{-10}$m beschrieben wird.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron im Inneren einer Kugel vom Radius a_0?

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Energie H und des Drehimpulses $\vec{L}$.

Hinweis: $\int\mathrm{d}^3r\,f(r) = 4\pi\int\mathrm{d}r\,r^2 f(r)$, $\int\mathrm{d}^3r\,g(r)\Delta g(r) = -4\pi\int\mathrm{d}r\,r^2 g'(r)^2$, $\langle\vec{r}|\vec{L}|\psi\rangle = \vec{r}\times\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla}\langle\vec{r}|\psi\rangle$.

Eine Anregung bringe das Elektron in einen normierten stationären Zustand $|\varphi\rangle$ mit

$$\langle\vec{r}\,|\varphi\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{30}}\big[\varphi_{100}(\vec{r}) + 3\varphi_{211}(\vec{r}) + 4\varphi_{200}(\vec{r}) + 2\varphi_{320}(\vec{r})\big]\;,$$

wobei $\varphi_{n\ell m}(\vec{r}) = \langle\vec{r}\,|n\ell m\rangle$ die Orts-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms mit den Quantenzahlen n, ℓ und m bezeichnet.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie mit Hilfe von $E_n = -\frac{\mathrm{Ry}}{n^2}$.

(d) Wie lautet der Erwartungswert von $\vec{L}^2$?

(e) Wie lautet der Erwartungswert von L_z?

Hinweis: Nutzen Sie die Orthonormalität $\int\mathrm{d}^3r\,\varphi^*_{n'\ell'm'}\,\varphi_{n\,\ell\,m} = \delta_{n'n}\,\delta_{\ell'\ell}\,\delta_{m'm}\,.$